

موسسه تدریس خصوصی

مدرسین تهران

➤ تدریس خصوصی دروس دانشگاهی: مقاطع دکتری، کارشناسی ارشد، کارشناسی

➤ آموزش نرم افزارهای تخصصی: تمامی رشته های مهندسی

➤ ترجمه متون تخصصی: تمامی رشته های دانشگاهی

➤ با همکاری اساتید دانشگاه ها: خانم و آقا

۰۲۱-۷۷۴۹۹۹۲۵

۰۹۲۱-۲۰۲۸۲۹۵



آدرس سایت: www.ModaresineTehran.com

پست الکترونیک: ModaresineTehran@gmail.com

کانال تلگرام تهران مرکز: [@Konj_Markaz](https://www.instagram.com/Konj_Markaz)

بسمه تعالی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی
اداره امتحانات

محل ضرب
مهر امتحانات

سؤالات امتحانی سال تحصیلی دوم ۹۴-۹۵

تاریخ: ۱۳۹۴/۳/۱۸
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
مجموع بارم از: ۱۰۰
استفاده از ماشین حساب: ☐ مجاز ☐ ممنوع
پاسخ سوالات در: پاسخنامه ☐ برگه سوالات ☐ پاسخنامه مخصوص سوالات چهارگزینه ای ☐ می باشد.

ضمناً نمرات در سایت www.modaresine.com اعلام خواهد شد و دانشجویان جهت مشاهده نمرات و اعتراض به این سایت مراجعه نمایند.

دایره توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = \sqrt{\frac{n^2 + 4n + 4}{n^2 + 1}}$

ب) $\log_{n-1} \log_{n-2} n$

با استفاده از قضیه منبره درم ثابت کنید.

الف) $\lim_{n \rightarrow 0} |n \cdot \sin \frac{1}{n}| = 0$

ب) $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\tan n - \sin n}{\sin^3 n}$

ج) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 4n} - n$

د) $\lim_{n \rightarrow 0^+} n^n$

در تابع زیر نوع ناپوشتمی نقاط انفصال را در نقطه $n = 0$ تعیین کنید.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{\sin n}{\ln |n|} & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

تدریس خصوصی منطبق بر جزوات درسی و نمونه سوالات با همکاری اساتید دانشگاه ها

مس سرب

مهر امتحان

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

اداره امتحانات

سؤالات امتحانی سال تحصیلی دوم ۹۴-۹۵

استاد: محترم اساتید نام درس: ریاضیات سطح: کارشناسی: سطح رشته: مقطع: کارشناسی

بغ امتحان: ۱۸/۳/۹۵ مدت امتحان: ۹۰ دقیقه مجموع بارم از: استفاده از ماشین حساب

اد صفحه سوالات: ۲ پاسخ سوالات در: پاسخنامه برگه سوالات پاسخنامه مخصوص سوالات چهارگزینه ای می باشد.

ضمناً نمرات در سایت www.azad.ac.ir اعلام خواهد شد و دانشجویان جهت مشاهده نمرات و اعتراض به این سایت مراجعه نمایند.مقدار تقریبی $\sin 41^\circ$ را محاسبه کنید.

مشتق توابع زیر را به دست آورید.

$$الف) y = \tan^2 x$$

$$ب) y = (\sin x)^n$$

$$ج) y = n^x \times 10^m$$

$$د) e^y = n + y$$

نشان دهید $y = n^x + n$ یک به یک است و $(f^{-1})'(0)$ را

به دست آورید.

مقدار تابع $y = n^x e^{-x}$ را برای $x = \frac{1}{2}$ محاسبه کنید.→ $\frac{f}{e^x}$

$$\frac{f}{e^x} = 0.8$$

$$\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{e^{2 - \sqrt{2}}} = 0.2$$

$$\frac{(2 + \sqrt{2})^2}{e^{2 + \sqrt{2}}} = 0.4$$

تدریس خصوصی منطبق بر جزوات درسی و نمونه سوالات با همکاری اساتید دانشگاه ها

حل الف) بایستی داشته باشیم $\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1} > 0$. با تعیین علامت داریم:

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$		
$x^2 + 4x + 3$		+	0	-	0	+
$x^2 + 1$		-		-	0	+
$\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$		-	0	+	تن	+

بنابراین مجموعه جواب نامعادله به صورت $\{-1\} - (-3, +\infty)$ همان دامنه

تابع است.

ب) بایستی عبارت جلوی لگاریتم و مبنای آن مثبت بوده و مبنای آن مخالف

یک باشد، یعنی باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 2 - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 1 \\ 2 - x > 0 \Rightarrow 2 > x \\ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) > 0 \Rightarrow x - 1 > \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

اشتراک جواب‌های اخیر مجموعه تهی است، بنابراین دامنه تابع برابر تهی

است.

۲) با استفاده از قضیه فشردگی ثابت کنید. $\lim_{x \rightarrow 0} \left| x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right| = 0$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$$

حل

از طرفی $\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ پس بنابر قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right| = 0$$

۳) حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 3)(-1)^{[x]}}{x^2 - 9}$$

الف)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

ب)

تدریس خصوصی منطبق بر جزوات درسی و نمونه سوالات با همکاری اساتید دانشگاه ها

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$



(ج)

(د)

حل الف) چون حد فوق حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است، پس برای رفع ابهام به دلیل

وجود تابع $[x]$ ، بایستی حد چپ و راست جداگانه محاسبه شود:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x+3)(-1)^{[x]}}{x^2-9} = \frac{(3^-+3)(-1)^2}{(3^-)^2-9} = \frac{6(1)}{9+ -9} = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x+3)(1)^{[x]}}{x^2-9} = \frac{(3^++3)(-1)^2}{(3^+)^2-9} = \frac{6(1)}{9+ -9} = \frac{-6}{0^+} = -\infty$$

پس حد موجود نیست.

ب) چون حد فوق حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است، پس برای رفع ابهام با استفاده از

$$\tan x - \sin x \sim x + \frac{x^3}{3} - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = \frac{x^3}{2} \text{ و } \sin^3 x \sim x^3 \text{ هم‌ارزی‌های مثلثاتی}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2}}{x^3} = \frac{1}{2} \quad \text{داریم:}$$

ج) چون حد فوق حالت مبهم $\infty - \infty$ است، پس با استفاده از هم‌ارزی

$$\text{رادیکال‌ها } \sqrt{ax^2 + bx} \sim \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right| \quad \text{داریم:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1} \left| x + \frac{3}{2(1)} \right| - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{3}{2} - x \right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

د) چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 0^0$ با استفاده از هم‌ارزی برای حالت مبهم نمایی ابتدا

آنرا برابر y قرار داده و از طرفین آن \ln می‌گیریم:

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x = x \ln x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1$$

$$(4) \text{ در تابع } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ نوع ناپیوستگی و نقاط انفصال را در نقطه } x_0 = 0 \text{ تعیین کنید.}$$

تدریس خصوصی منطبق بر جزوات درسی و نمونه سوالات با همکاری اساتید دانشگاه ها

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \sim \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} \sim \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-x} = -1$$

حل

پس تابع f در $x = 0$ حد ندارد و لذا ناپیوستگی از نوع رفع نشدنی است.

(۵) مقدار تقریبی $\sin 31^\circ$ را محاسبه کنید. (تهران مرکزی نیم سال اول ۹۰-۹۱)

حل مشتق تابع $f(x) = \sin x$ برابر $f'(x) = \cos x$ است، پس با قرار دادن

$x = 30^\circ$ و $\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ در فرمول تقریبی دیفرانسیل داریم:

$$f(x + \Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x$$

$$f(31^\circ) \simeq f(30^\circ) + f'(30^\circ) \left(\frac{\pi}{180} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

(۶) مشتق توابع زیر را به دست آورید.

$$y = \tan^2(\Delta x)$$

(الف)

$$y = (\sin x)^x$$

(ب)

$$y = x^2 \times 10^{2x}$$

(ج)

$$e^y = x + y$$

(د)

$$y' = 2(\Delta)(1 + \tan^2(\Delta x)) \tan(\Delta x)$$

حل (الف)

(ب)

$$y = (\sin x)^x \Rightarrow \ln y = \ln(\sin x)^x = x \ln(\sin x)$$

$$\frac{y'}{y} = \ln(\sin x) + x \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow y' = y(\ln(\sin x) + x \cot x)$$

$$= (\sin x)^x (\ln(\sin x) + x \cot x)$$

(ج)

$$y' = 2x(10^{2x}) + 2x^2(10^{2x}) \ln 10$$

$$f(x, y) = e^y - x - y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{-1}{e^y - 1}$$

(د)

(۷) نشان دهید $y = x^3 + x$ یک به یک است و $(f^{-1})'(0)$ را به دست آورید.

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1^3 + x_1 = x_2^3 + x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1^3 = x_2^3 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

حل

تدریس خصوصی منطبق بر جزوات درسی و نمونه سوالات با همکاری اساتید دانشگاه ها

پس تابع $y = x^2 + x$ یک به یک است و داریم:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x+1} \Rightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

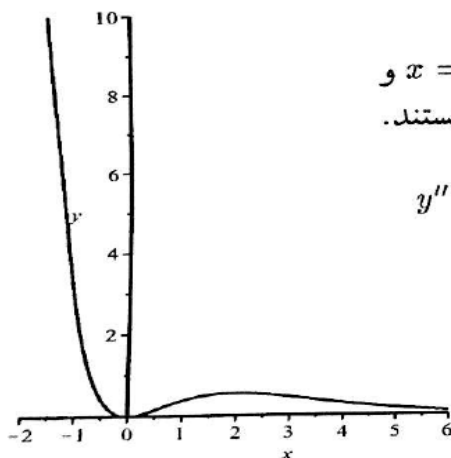
۸) نمودار تابع $y = x^2 e^{-x}$ را رسم کنید.

حل

$$y = x^2 e^{-x} \Rightarrow y' = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2) e^{-x} = 0$$

$$2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$-$
y		\searrow	\nearrow	\searrow
		\min	\max	



با توجه به جدول تغییرات تابع نقاط $x = 0$ و $x = 2$ ، به ترتیب نقاط مینیمم و ماکزیمم تابع هستند.

$$y'' = (2 - 2x) e^{-x} - (2x - x^2) e^{-x} = (2 - 4x + x^2) e^{-x} = 0$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{2} \\ x = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{2}$	$2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
y''	$+$	0	$-$	$+$
y	\cup		\cap	\cup
		عطف	عطف	

تدریس خصوصی منطبق بر جزوات درسی و نمونه سوالات با همکاری اساتید دانشگاه ها